ВВЕДЕНИЕ. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Все математические дисциплины можно условно разделить на *дискретные* и *непрерывные*. Дискретная математика – это та часть математики, главной особенностью которой является изучение отдельных объектов, без привлечения понятия непрерывности, т.е. дискретность – это антипод непрерывности. В дискретной математике отсутствует понятие предельного перехода, присущее классической, «непрерывной» математике. Она занимается изучением дискретных структур, которые возникают как внутри математики, так и в ее приложениях. Однако она зародилась в глубокой древности, раньше, чем непрерывная математика, хотя особую значимость приобрела только в последние десятилетия, в связи с повсеместным внедрением в практику информационных технологий.

Таким образом, в широком смысле дискретная математика включает в себя все разделы математики, в которых не используются топологические методы, в частности понятие непрерывности. Это – все разделы алгебры, математическая логика, почти вся теория чисел (в том числе всевозможные компьютерные арифметики), многие разделы экономико-математических методов, комбинаторика и многие другие дисциплины. В более узком смысле дискретная математика – это те разделы математической логики, алгебры, теории чисел и математической кибернетики, которые непосредственно составляют теоретический фундамент информатики. В этом узком смысле дискретная математика включает в себя теорию булевых функций и их минимизацию, теорию графов и многие разделы теоретической кибернетики, теорию автоматов и формальных грамматик, комбинаторику, теорию алгоритмов (в том числе теорию сложности вычислений), криптографию и теорию кодирования.

Некоторые из вышеперечисленных разделов имеют не только многочисленные «внутренние» (с точки зрения специалиста по информационным системам или вычислительной техники) приложения, используемые, к примеру, при построении различных дискретных устройств, в программировании и т.д., но их результаты и методы применяются также при решении многих нужных для практики задач. Например, при рассмотрении транспортных задач, для нахождения оптимальных решений в управлении, для выделения «узких мест» при планировании и разработке проектов, при составлении оптимальных расписаний, а также при моделировании сложных технологий и процессов различной природы.

Целью изучения дисциплины является ознакомление студентов с системой понятий и некоторыми наиболее важными в приложениях методами теории множеств, математической логики, теории булевых функций и теории графов. Знания и навыки, полученные при ее изучении, используются в дисциплинах: «Информатика», «Программирование», «Структуры и алгоритмы обработки данных в ЭВМ», «Базы данных», «Экспертные и интеллектуальные системы» и т.д. Но в особенности знания по дискретной математике пригодятся при изучении дисциплин, связанных с функциональным и логическим программированием, кодированием и защитой информации.

Основная задача состоит в том, чтобы будущие специалисты чётко освоили основные понятия и приёмы работы с булевыми функциями и графами: построение таблиц значений; поиск и исключение фиктивных переменных; приведение булевых функций к стандартной форме (д.н.ф., к.н.ф., многочлен Жегалкина); основные методы минимизации булевых функций; построение диаграммы (рисунка) графа по его матрицам смежности и инцидентности и обратная задача; установление изоморфизма (одинаковости) графов; определение основных характеристик и свойств графов (векторы степеней, планарность, эйлеровость, гамильтоновость и т.п.); изучение важного частного случая графов – деревьев и их свойств.

За недостатком места о приложениях говорится относительно мало. Однако такие примеры содержатся в литературе.

Данное пособие предназначено в основном для изучения основ именно дискретной математики в узком понимании слова, хотя при этом затронуты основополагающие разделы математической логики – исчисление высказываний и исчисление предикатов. Однако математическую логику настоятельно рекомендуется изучать по более фундаментальным источникам, например, [1, 11,15,16,19,23,29]. В то же время, многие разделы дискретной математики в узком смысле слова в данном пособии никак не отражены, в частности, теория кодирования и криптография, теория алгоритмов и теория сложности вычислений. Это связано, в первую очередь, с ограниченностью отводимого времени для изучения дисциплины в учебных планах у студентов, обучающихся информационным технологиям и использованию вычислительной техники. Курс лекций будет также полезен будущим специалистам по прикладной математике, в частности по математическому и компьютерному моделированию.

Пособие – это существенно поработанный и дополненный вариант пособий [20,21].

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

См. лекции 1-5

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ И ИХ МИНИМИЗАЦИЯ

Теорию булевых функций и их минимизации можно считать по праву центральным моментом для математического образования любых инженеров, чья деятельность подразумевает активное использование ЭВМ.

6 ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ. ДВОЙСТВЕННЫЕ И САМОДВОЙСТВЕННЫЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

7 СОВЕРШЕННЫЕ ДНФ И КНФ. ПОЛИНОМ ЖЕГАЛКИНА. МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ. ПОЛНОТА. КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ

См. лекции 6-8

8 ПРОБЛЕМА МИНИМИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ, ИНДЕКСЫ ПРОСТОТЫ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД. СОВЕРШЕННАЯ, ТУПИКОВАЯ, МИНИМАЛЬНАЯ, СОКРАЩЕННАЯ ДНФ

8.1 Проблема минимизации

8.1.1 Напомним, что *дизъюнктивной нормальной формой* (д. н. ф.) для булевой функции f (далее просто функции) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций, как функция равная f, а *элементарной конъюнкцией* называется конъюнкция переменных или их отрицаний. Двойственным образом определяется *конъюнктивная нормальная форма* (к. н. ф.): говорят, что функция f находится в к.н.ф., если она записана в виде конъюнкции *элементарных дизъюнкций*, т.е. дизъюнкций переменных или их отрицаний.

Выше, в разделе 7.1 уже рассматривались такие д.н.ф. (к.н.ф.), что в каждой её элементарной конъюнкции (дизъюнкции) каждая литера встречается ровно один раз, т.е. *совершенные* д.н.ф. (к.н.ф.). Но совершенные д. н. ф. и к.н.ф. весьма громоздки, более того, мы увидим далее, что это – самые длинные д.н.ф. или к.н.ф. из всех возможных – см. пример 8.2 и замечание после него. Во многих случаях та же функция может быть записана в виде д.н.ф. или к.н.ф. более коротким способом.

Пример 8.1 Рассмотрим следующую д.н.ф. $H =_g \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z$. Здесь запись $A =_g B$ означает *графическое равенство*, т.е. равенство в точности как одинаковые буквенные выражения («буква в букву»). Объединяя её первую и вторую элементарную конъюнкцию и используя дистрибутивность (см. раздел 6.2), получаем $H = (\bar{y} \vee y)\ \bar{x}z \vee x\bar{y}z = 1 \cdot \bar{x}z \vee x\bar{y}z = \bar{x}z \vee x\bar{y}z =_g G$. Или даже ещё короче: $H = \bar{x}z \vee \bar{y}z =_g F$. Обратите внимание: хотя д.н.ф. F, G и H равны как функции (представляют одну и ту же функцию, проверить это можно, составив таблицы значений), как д.н.ф. они все три – различны.

Упражнение 8.1 *Проверьте равенства* $H = G = F$.

Термины «длиннее», «короче» можно уточнять разными способами [30]. Рассмотрим один из них – наиболее естественный: количество *литер* (или *букв*, т.е. переменных или их отрицаний), участвующих в записи д.н.ф. или к.н.ф. A (знаки конъюнкций и дизъюнкций не считаются), называется *буквенным индексом простоты*, и обозначается $L_Б(A)$. Для описанных выше д.н.ф. из примера 8.1 он равен: $L_Б(H)=9$, $L_Б(G)=5$, $L_Б(F)=4$.

8.1.2 *Проблему минимизации булевых функций* обычно понимают как нахождение д.н.ф. или к.н.ф., реализующую данную функцию с каким-то индексом простоты наименьшего значения. Такие д.н.ф. (или к.н.ф.) называются *минимальными* по этому индексу.

Излагаемые ниже методы рассчитаны в первую очередь на индекс $L_Б$ для д.н.ф., но некоторые из них годятся для любого индекса простоты. Для этого индекса простоты (и некоторых других) способы минимизации д.н.ф. и к.н.ф. являются двойственными друг к другу. Поясним это. Предположим, что мы научились находить минимальные д.н.ф. по индексу $L_Б$ («*минимизировать по единицам*»), а для данной функции f требуется найти к.н.ф. с наименьшим значением $L_Б$ (*«минимизировать по нулям»*). В этом случае мы находим двойственную функцию f^* (см. подраздел 6.4), для неё ищем минимальные д.н.ф. $A_1,\dots,A_m$. По предложению 6.1 имеем $f = (f^*)^* = (A_1)^* = \dots = (A_m)^*$, а согласно следствию 6.1 все $(A_1)^*,\dots,(A_m)^*$ являются уже к.н.ф. Понятно, что эти к.н.ф. и будут минимальными по индексу $L_Б$. Таким образом, достаточно уметь находить либо минимальные д.н.ф., либо минимальные к.н.ф.

Далее, д.н.ф. минимальные по индексу $L_Б$, т.е. те, в запись которых входит меньше всего букв, и которые реализуют данную функцию, будем называть просто *м и н и м а л ь н ы м и* для этой функции.

8.1.3 Сразу отметим, что свойство минимальности (даже по $L_Б$) следует отличать от свойства «не упрощаться далее». Например, д.н.ф. $A = \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{y}z \vee xy \vee y\bar{z}$ и $B = \bar{x}\,\bar{y} \vee xz \vee y\bar{z}$ реализуют одну и ту же функцию, что можно проверить, составив их таблицы значений. Причём в д.н.ф. A нельзя удалить ни одну букву в любой её элементарной конъюнкции, и невозможно удалить ни одну конъюнкцию, без нарушения равенства функций. Таким образом д.н.ф. A (впрочем и B тоже) упростить уже нельзя, в том смысле, что из неё нельзя убрать ни один элемент, такие д.н.ф. называются *т у п и к о в ы м и*. В тоже время, $L_Б(A)=8$, а $L_Б(B)=6$.

Все существующие методы и аналитические, и геометрические позволяют находить только тупиковые д.н.ф., и в процессе поиска не отличают их от минимальных. Поэтому для данной функции стремятся найти, когда это возможно, все тупиковые д.н.ф. Понятно, что все минимальные д.н.ф. (по $L_Б$) находятся среди них.

Обратите внимание, что термин «минимальная д.н.ф.» употребляется здесь в полном соответствии с общематематическим пониманием минимальности, которое было описано в п. 2.2.4.2. В частности у одной булевой функции может быть несколько минимальных д.н.ф. и к.н.ф.

8.1.4 Предположим, что для какой-то функции f мы нашли все её тупиковые д.н.ф.: $A_1 = K_{1,1} \vee K_{1,2} \vee \dots \vee K_{1,r}$; $A_2 = K_{2,1} \vee K_{2,2} \vee \dots \vee K_{2,s},\dots, A_m = K_{m,1} \vee K_{m,2} \vee \dots \vee K_{m,t}$, где $K_{i,j}$ – элементарные конъюнкции. Тогда с одной стороны, для всех i имеем, что $f = A_i$, а с другой, $f = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_m$, это следует из того, что для булевых функций верно равенство $A \vee A = A$, т.е. $f = (K_{1,1} \vee K_{1,2} \vee \dots \vee K_{1,r}) \vee (K_{2,1} \vee K_{2,2} \vee \dots \vee K_{2,s}) \vee \dots \vee (K_{m,1} \vee K_{m,2} \vee \dots \vee K_{m,t})$. Если в последнем равенстве раскрыть скобки и убрать все повторы, используя опять $K \vee K = K$, то после перенумерации элементарных конъюнкций получим выражение вида $f = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_p =_g C$. В этом выражении все K_i различны; ни в одной из элементарных конъюнкций K_i нельзя убрать ни одной литеры; и все тупиковые д.н.ф. получаются из C удалением каких-то элементарных конъюнкций. Д.н.ф.

с этими свойствами называются *с о к р а щ ё н н ы м и*, а конъюнкции, их составляющие – *п р о с т ы м и и м п л и к а н т а м и.* Последний термин объясняется следующей теоремой.

Т е о р е м а 8.1 *Элементарная конъюнкция K является простой импликантой для функции f тогда и только тогда, когда $(K \to f) = 1$, а любая элементарная конъюнкция K', полученная из K удалением какой-то литеры, этим свойством уже не обладает. Сокращённая д.н.ф. является дизъюнкцией всех простых импликант.*

8.2 Геометрический подход

Выше в разделах 6 и 7 мы видели, что булевы функции можно задавать таблицей значений, вектором значений и различными формулами – д.н.ф., к.н.ф., многочленом Жегалкина. Оказывается их можно ещё и рисовать. Причём, когда количество переменных невелико – при $n \le 4$, изучение рисунка позволяет найти сокращённую и несколько тупиковых д.н.ф., и тем самым минимизировать нарисованную булеву функцию.

Таблица 8.1

	x	y	z	f
P_1	0	0	0	1
P_2	0	0	1	1
	0	1	0	0
P_3	0	1	1	1
	1	0	0	0
P_4	1	0	1	1
	1	1	0	0
P_5	1	1	1	1

П р и м е р 8.2 Рассмотрим функцию $f = (1,1,0,1,0,1,0,1)$. Её таблица значений (таблица 8.1) позволяет быстро найти множество N_f – множество тех точек, где функция равна 1: $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (0,0,1)$, $P_3 = (0,1,1)$, $P_4 = (1,0,1)$, $P_5 = (1,1,1)$. Изобразим эти точки в виде вершин единичного кубика, помещённого в начало координат (см. рис. 8.1). Согласно методу из подраздела 7.1 (пример 7.2) по этим пяти точкам мы можем построить совершенную д.н.ф. A, содержащую пять элементарных конъюнкций, каждая из которых содержит по три литеры:

$$f = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\,z \vee xyz =_g A. \qquad (8.1)$$

Таким образом, $L_Б(A) = 15$. Но рисунок позволяет найти другие, более короткие д.н.ф. для этой функции и заметно уменьшить количество букв. Мы видим, что точки P_2, P_3, P_4 и P_5 полностью покрывают верхнюю грань кубика, которая задаётся уравнением $z = 1$. И действительно, у всех этих точек третья координата равна 1. Эта грань имеет размерность два.

Сделаем небольшое отступление. Далее подмножество вершин n-мерного куба будем называть *г р а н ь ю р а з - м е р н о с т и* $n - r$, если его можно выделить среди множества всех вершин системой из r уравнений вида

$$\begin{cases} x_{i_1} = \alpha_1 \\ x_{i_2} = \alpha_2 \\ \vdots \\ x_{i_r} = \alpha_r \end{cases} \qquad (8.2)$$

Таким образом, ребро трёхмерного куба – это грань размерности 1 (одномерная); грань в обычном понимании – это двухмерная грань; любая вершина – нульмерная грань; а сам обычный кубик – это трёхмерная грань, если его рассматривать как часть куба большей размерности.

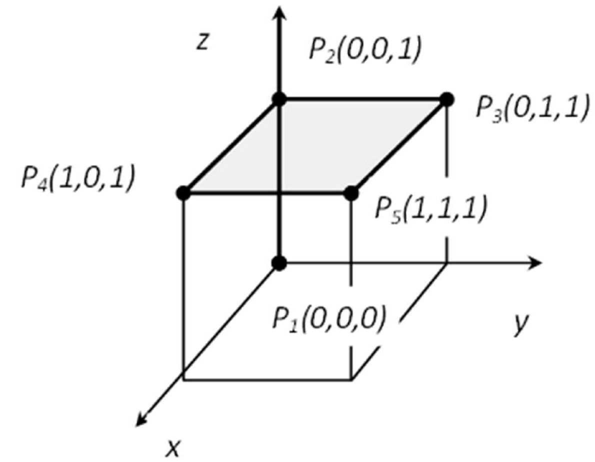

Рисунок 8.1 – Функция f и её грани

Вернёмся к примеру 8.2. Точки P_2, P_3, P_4 и P_5 накрываются верхней гранью кубика, и во множестве $N_f = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ нет грани большей размерности, которая содержала бы в себе эти точки. Таким образом, грань $\{P_2, P_3, P_4, P_5\}$ имеет максимальную размерность внутри множества N_f. Несложно понять, что соответствующая этой максимальной грани элементарная конъюнкция $z^1 = z$ – простая импликанта для функции f: в самом деле, во-первых, $(z \to f) = 1$, а во-вторых, из элементарной конъюнкции z нельзя вычеркнуть ни одну букву. Точка $P_1 = (0,0,0)$ не покрылась этой гранью, одна эта точка (грань размерности 0) задаётся системой уравнений, подобной системе (8.2): $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, т. е. элементарной конъюнкцией $x^0 y^0 z^0 = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ (см. п. 7.1.2 и упражнение 7.2). Но считать эту элементарную конъюнкцию простой импликантой нельзя потому, что точка P_1 содержится в ребре кубика, идущего вдоль оси $0z$, и который полностью попадает во множество N_f. Это ребро (грань размерности 1) состоит из двух точек P_1 и P_2, у них две общие координаты $x = 0$ и $y = 0$, при этом ребро P_1P_2 уже не входит ни в какую грань куба, которая одновременно содержится в N_f, т.е. это тоже максимальная грань внутри N_f. И опять, конъюнкция $x^0 y^0 = \overline{x}\,\overline{y}$ – простая импликанта для f (так как $(\overline{x}\,\overline{y} \to f) = 1$ и $(\overline{x} \to f) \neq 1$, $(\overline{y} \to f) \neq 1$). Если мы ищем только какую-нибудь тупиковую д.н.ф., то $z \vee \overline{x}\,\overline{y}$ уже является таковой, так как соответствующие её конъюнкциям грани покрывают всё множество N_f и не одну из них нельзя опустить. Действительно, если удалим грань-ребро P_1P_2, то незакрытой останется точка P_1, а когда убираем грань $P_2P_3P_4P_5$, то непокрытыми оставляем уже три точки – P_3, P_4 и P_5.

При нахождении сокращённой д.н.ф. мы обязаны продолжить дальше поиск внутри множества N_f других максимальных по включению граней. В данном случае таких граней нет, значит, $z \vee \overline{x}\,\overline{y}$ по совместительству является и сокращённой и минимальной.

Упражнение 8.2 *Проверьте справедливость следующих утверждений о функции f из примера 8.2 а) $(z \to f) = 1$; б) $(\overline{x}\,\overline{y} \to f) = 1$; в) $(\overline{x} \to f) \neq 1$ и г) $(\overline{y} \to f) \neq 1$), составив таблицы значений.*

З а м е ч а н и е 8.1 Совершенная д.н.ф. A для функции f, задаваемая равенством (8.1) соответствует покрытию множества N_f отдельными точками-вершинами, т.е. минимальными возможными гранями. Понятно, что это верно и в общем случае для любой ненулевой булевой функции. Таким образом, совершенная д.н.ф. – самая громоздкая из всех возможных д.н.ф.

П р и м е р 8.3 Рассмотрим ещё одну функцию $g = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz$, заданную своей совершенной д.н.ф. Её таблица значений приведена в таблице 8.2. Как и ранее находим множество N_g – множество тех точек, где функция g принимает значение 1. В данном случае это пять точек: L_1, L_2, L_3, L_4 и L_5. Они образуют четыре максимальные грани, три из которых размерности один (рисунок 8.2). Это следующие рёбра:

Таблица 8.2

	x	y	z	g
L_1	0	0	0	1
L_2	0	0	1	1
L_3	0	1	0	1
	0	1	1	0_1
L_4	1	0	0	1
	1	0	1	0_2
	1	1	0	0_3
L_5	1	1	1	1

$$L_1L_2\colon \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \bar{x}\bar{y} = 1;\quad L_1L_3\colon \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \bar{x}\bar{z} = 1;$$

$$L_1L_4\colon \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \bar{y}\bar{z} = 1.$$

Кроме того, вершина L_5 составляет в одиночку тоже максимальную грань размерности нуль:

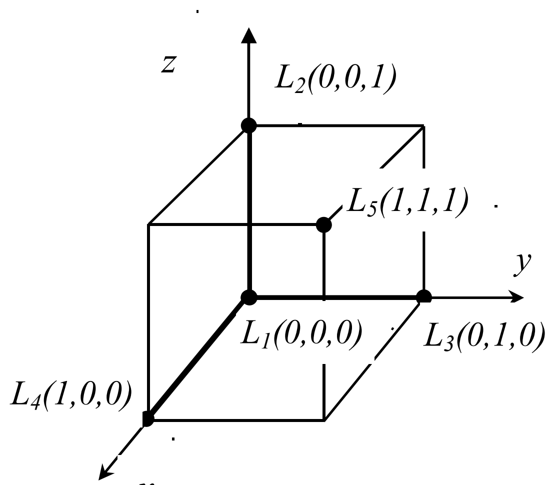

Рисунок 8.2

$$L_5\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow xyz = 1.$$

Также как и в примере 8.2, несложно проверяется, что соответствующие этим граням элементарные конъюнкции являются простыми импликантами функции g. Поскольку мы нашли все максимальные грани, то дизъюнкция соответствующих им элементарных конъюнкций составляет сокращённую д.н.ф. $g = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \vee xyz$. Из рисунка 8.2 хорошо видно, что ни одну из граней L_1L_2, L_1L_3, L_1L_4 и L_5 нельзя устранить так, чтобы все пять точек оказались покрытыми, т.е. эти четыре грани составляют *н е п р и в о д и м о е* покрытие множества N_g. Отсюда несложно понять, что соответствующая д.н.ф. $g = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \vee xyz$ является также и тупиковой, а ввиду того, что она единственная, она является также и минимальной.

З а м е ч а н и е 8.2 В рассмотренных простых примерах сокращенные д.н.ф. счастливым образом совпадают с тупиковыми и потому являются и минимальными. Однако такая приятная картина наблюдается далеко не всегда – см. ниже разделы 9,10.

Упражнение 8.3 *Теперь Вы можете достаточно просто (не составляя таблиц значений) проверить справедливость утверждений о равенстве* $H = G = F$ *из примера 8.1, а также о равенстве д.н.ф.* $A = \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{y} z \vee xy \vee y\bar{z}$ и $B = \bar{x}\,\bar{y} \vee xz \vee y\bar{z}$ *из п. 8.1.3. Для этого достаточно нарисовать эти функции, как это сделано в примерах выше.*

8.3 Карты Карно

Когда количество переменных невелико, т.е. при $n = 4$ (иногда при $n = 3$), обычно не рисуют четырёхмерный или трёхмерный куб, а составляют *карту Карно* (*диаграмму Вейча*)**.** По сути, она представляет собой ту же таблицу значений функции, но более компактно размещённую. Но за счёт более наглядного представления такая специальная таблица позволяет увидеть грани множества N_f, как и рисунок кубика.

Таблица 8.3

z \ x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
0	1(L_1)	1(L_3)	1(L_4)	0_3
1	1(L_2)	0_1	0_2	1(L_5)

8.3.1 Например, таблицу значений функции g из примера 8.3 (таблица 8.2) можно разместить, как показано в таблице 8.3. Столбик для значений самой функции g теперь располагается в выделенных восьми клетках, которые размещены в две *рабочие* строчки и в четыре *рабочих* столбика. Остальная часть таблицы вспомогательная – в этих клетках даны маркеры переменных и их возможные значения. Чтобы легче было заполнить таблицу 8.3, исходя из таблицы 8.2, три нуля функции g пронумерованы нижними индексами. Первый нуль соответствует набору значений переменных (0,1,1), и поэтому мы его помещаем во второй рабочий столбик, который соответствует значениям $x = 0$, $y = 1$, а поскольку $z = 1$, то 0_1 попадает во вторую строку. Аналогичным образом размещаем 0_2 и 0_3. Остальные пять рабочих ячеек таблицы 8.3 заполняем единицами.

В таблице 8.2 единица набора $L_1 = (0,0,0)$ соседствовала только с одной, находящейся ниже её единицей набора $L_2 = (0,0,1)$. А на кубике с рисунка 8.2 вершина L_1 соединена ребрами и с L_2, и с L_3, и с L_4. Это соседство-соединение и позволило увидеть нам грани-рёбра L_1L_2, L_1L_3 и L_1L_4. Таблица 8.3 более информативна по сравнению таблицей 8.2: теперь L_1 соседствует и с L_2, (она, как и прежде находится ниже), а также и с L_3, (которая теперь справа), т.е. первый рабочий столбик таблицы

Таблица 8.4

z \ x	0	0	1	1
y	0	1	1	0
0	1	1	0_3	1(L_4)
1	1	0_1	1(L_5)	0_2

8.3, заполненный единицами, – это грань $L_1L_2 = \overline{x}\,\overline{y}$, а первые две клетки в первой строке – это грань $L_1L_3 = \overline{x}\,\overline{z}$.

Однако ребра L_1L_4 в таблице 8.3 не видно, так как единица L_4, соответствующая набору (1,0,0), не находится рядом с L_1. В то же время точки L_3 и L_4 в этой таблице соседние, но пара L_3L_4 не соответствует никакому ребру кубика 8.2.

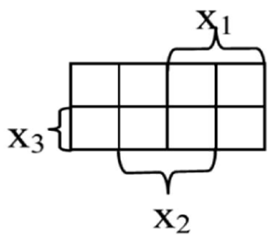

Рисунок 8.3

Чтобы исправить это положение поменяем третий и четвёртый столбики, получим таблицу 8.4. Здесь соседство точек L_1 и L_2, а также L_1 и L_3 сохранилось, а точки L_3 и L_4 теперь не соседствуют. Пара L_1 и L_4 теперь образует ребро $L_1L_4 = \overline{y}\,\overline{z}$, ввиду того, что таблица 8.4 – это не просто таблица, а как бы развёртка кубика с рисунка 8.2, т.е. первый и последний четвёртый столбики в ней считаются соседними. Как и раньше вершина L_5 осталась без пары, и соответствующая ей элементарная дизъюнкция $x\,y\,z$ является простой импликантой функции g.

8.3.2 На практике в карте Карно рисуют только рабочие ячейки, как например, это изображено на рисунке 8.3 (вместо x поставлено x_1, вместо y – x_2 и на месте z – x_3). Все клетки, отмеченные скобкой x_i (по строке и столбцу), представляют наборы с координатой $x_i = 1$, а в неотмеченных строках и столбцах ячейки соответствуют наборам с координатой $x_i = 0$.

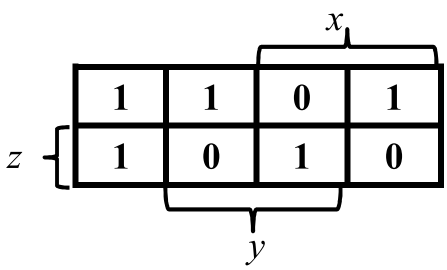

Рисунок 8.4

Таким образом, карта Карно для рассмотренной выше функции g приобретает такой вид как показано на рисунке 8.4

В случае четырех переменных карту Карно рисуют в виде квадрата (см. рисунок 8.5).

З а м е ч а н и е 8.3 Обозначать выделенные скобками строки и столбцы именно в таком порядке совсем не обязательно. В примере 8.4 ниже будет использован другой порядок расстановки переменных – см. таблицу 8.6. Вы сами можете использовать совсем другой способ, самое главное при этом – расставить переменные так, чтобы было удобно переносить значения функции из «обычной» таблицы значений функции (такой как таблица 8.5) на вашу карту Карно и обратно.

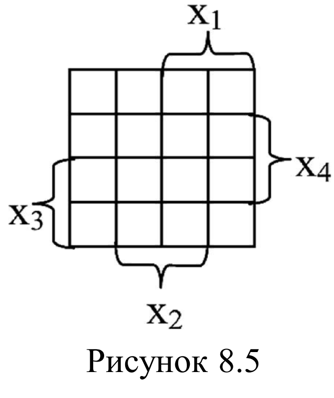

Рисунок 8.5

П р и м е р 8.4 Для функции $f = (1,1,1,0, 1,1,1,1,1,0,1,1,1,0,0,0)$ обычная таблица значений представлена в таблице 8.5. Её же можно разместить в квадрате 4х4. (см. таблицу 8.6). В первых двух строках квадрата будут помещены значения функции в тех точках, у которых первые координаты равны 0, но сами координаты точек не подписываются.

В 3-й и 4-й строках будут размещены точки с координатами вида (1,…). Опять в клетках ставятся только значения функции в этих точках, а сами координаты не пишутся. Чтобы не запутаться сбоку (в данном случае – слева) делают напротив 3-й и 4-й строчек пометку x_1. Срединные столбики (2-й и 3-й) отводятся для значений функции в точках, у которых вторая координата равна 1, и их помечают сверху символом x_2, а 1-й и 4-й – для точек с нулевыми вторыми координатами. На 2-й и 3-й строке с другой стороны от x_1 делают метку x_3, а столбики 3 и 4 метятся как x_4. Столбики и строки, где соответствующая координата нулевая, никак не отмечают, чтобы не загромождать рисунок и не сбиваться.

Таблица 8.5

№	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0_1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0_2
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0_3
14	1	1	1	0	0_4
15	1	1	1	1	0_5

В данном случае функция принимает в одиннадцати случаях единичное значение и в пяти – нулевое. Поэтому заполнять карту Карно начнём с нулей. Первый из них стоит в строке №3 таблицы значений с координатами (0,0,1,1). Соответствующая клетка (в таблице 8.5 она помечена как 0_1) ищется следующим образом. Первый нуль означает, что нужно взять клетку из первых двух строк. Второй нуль говорит, что из этих восьми клеток нужно оставить четыре боковые (т.е. в 3-м и 4-м столбиках). Третья координата, единица, требует, чтобы из этих четырёх клеток были оставлены те, которые лежат в 2-й или 3-й строках. А так как первая координата нуль, то оставляем только вторую строку, таких клеток две – в 1-м и 4-м столбце. Наконец, последняя единица заставляет выбрать из них ту, что попадает в 4-й столбик. Второй нуль (из строки №9) с координатами (1,0,0,1) помещён в таблице 8.6 в клетке с отметкой 0_2, третий с координатами (1,1,0,1) – в клетке 0_3, четвёртый (1,1,1,0) – в клетке 0_4, пятый из последней строки – в клетке 0_5.

Таблица 8.6

		x_2	x_2		
	1^4	1^4	1	1	
	1	1	1	0_1	x_3
x_1	1	0_4	0_5	$\underline{1}$	x_3
x_1	1_4	$\underline{1}_4$	0_3	0_2	
			x_4	x_4	

Остальные клетки карты Карно заполняем единицами. После заполнения всей карты начинаем составлять какую-нибудь тупиковую д.н.ф. Замечаем, что одна из строк, а именно, первая полностью заполнена единицами. У всех точек этой строки первая и третья координаты – нулевые потому, что первую строку слева мы не пометили x_1, а справа – x_3, т.е. эти точки задаются конъюнкцией $K_1=\bar{x}_1\bar{x}_3$. При этом первую строку не удаётся объединить с соседними, это в данном случае вторая и четвёртая (!) строки, так как в них есть нули. Значит, точки первой строки представляют максимальную во множестве N_f грань, следовательно, $K_1=\bar{x}_1\bar{x}_3$ – простая импликанта. Аналогично убеждаемся, что конъюнкция $K_2=\bar{x}_2\bar{x}_4$, задающая первый столбик карты, – тоже простая импликанта. Четыре клетки, стоящие в первых двух строках и во 2-м и 3-м столбце, определяют третью простую импликанту $K_3=\bar{x}_1x_2$. Остались непокрытыми две клетки с единицами, выделенные подчёркиванием. Та из них, что стоит в четвёртой строке вместе с соседней угловой образует конъюнкцию $x_1\bar{x}_3\bar{x}_4$, но по соседству – в первой (!) строке и первых двух столбиках тоже стоят единицы. Объединяя все эти четыре клетки (помеченные на карте верхними и нижними индексами 4) вместе, получаем ещё одну простую импликанту $K_4=\bar{x}_3\bar{x}_4$. Последняя непокрытая точка имеет «координаты» $x_1\bar{x}_2x_3x_4$, но её можно объединить с соседней клеткой, стоящей тоже в третьей строке «напротив», т.е. в первом (!) столбике. Вместе они уже образуют импликанту $K_5=x_1\bar{x}_2x_3$.

Теперь все клетки с единицами покрываются этими пятью конъюнкциями, ни одну из импликант нельзя удалить, так как при их построении, добавление каждой из них давало покрытие хотя бы одной точке. Таким образом, $\bar{x}_1\bar{x}_3\vee\bar{x}_2\bar{x}_4\vee\bar{x}_1x_2\vee\bar{x}_3\bar{x}_4\vee x_1\bar{x}_2x_3$ – тупиковая д.н.ф. Но она не является сокращённой потому, что четыре клетки, стоящие в левом верхнем углу карты (первые две строки и первые два столбца) тоже образуют максимальную грань во множестве N_f, соответствующая конъюнкция – $K_6=\bar{x}_1\bar{x}_4$. Других простых импликант найти не удаётся, следовательно, $\bar{x}_1\bar{x}_3\vee\bar{x}_2\bar{x}_4\vee\bar{x}_1x_2\vee\bar{x}_3\bar{x}_4\vee x_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_4$ – сокращённая д. н. ф.

Упражнение 8.4 *Нарисуйте для функции f из примера 8.4 карту Карно в виде, данном на рисунке 8.5, и убедитесь, что тупиковая и сокращённая д.н.ф. получатся точно такими же, как и по карте-таблице 8.6.*

8.4 Соответствие между аналитическими понятиями и их геометрическими образами

Подведём итог. Пусть $N_f = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \mid f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1\}$ – это множество всех тех точек, где функция f принимает единичные значения. Минимизация с точки зрения геометрии подразумевает следующие действия:

1) Находим ***все*** *грани максимальной размерности, входящие в N_f;*

2) Составляем из части этих граней неприводимое покрытие множества N_f, т.е. такое покрытие из которого не может быть выброшена ни одна грань так, чтобы не нарушилось покрытие;

3) Берём дизъюнкцию тех элементарных конъюнкций, которые задают грани этого неприводимого покрытия.

Полученная в результате этого д.н.ф. соответствует тупиковой, а элементарные конъюнкции, соответствующие максимальным граням – простым импликантам для функции *f*. Если составить дизъюнкцию в с е х простых импликант, то получим сокращённую д.н.ф.

8.4.1 Таким образом, процесс минимизации можно разделить на три этапа, вне зависимости от того какими методами он проводится – аналитическими или геометрическими.

П е р в ы й э т а п. Нахождение сокращённой д.н.ф. для данной функции.

В т о р о й э т а п. Используя найденную сокращённую д.н.ф., из неё убирают некоторые элементарные конъюнкции и получают либо все тупиковые д.н.ф. сразу (некоторые аналитические методы это позволяют – см. раздел 10), либо выписывают некоторые тупиковые д.н.ф. «вручную», т.е. одну за другой по очереди.

Т р е т и й э т а п. Из списка найденных тупиковых д.н.ф. выбираются минимальные.

8.4.2 Ввиду такой тесной связи между аналитическими и геометрическими методами минимизации имеет смысл рассмотреть строение n-мерного куба – см. таблицу 8.7. В этой таблице в крайнем левом столбце указано значение размерности куба – число n. В самой верхней строке указано значение параметра k – размерности нужной грани в рассматриваемом кубе, а также название граней малых размерностей.

Таблица 8.7 – Строение n-мерного куба

k \ n	0-мерн, вершины ранг n	1-мерн, рёбра ранг n-1	2-мерн грани ранг n-2	3-мерн кубы ранг n-3	4-мерн ранг n-4	5-мерн ранг n-5	…	k-мерн ранг n-k
0	1	–						
1	2	1	–					
2	4	4	1	–				
3	8	12	6	1	–			
4	16	?	?	?	1	–	…	
5	32	?	?	?	?	1	…	
6	64	?	?	?	?	?	…	
…	…	…	…	…	…	…		
n	2^n	?	?	?	?	?	…	?

Итак, мы знаем, что нульмерный куб состоит из одной точки-вершины, которая является единственной гранью размерности 0 (см. строку таблицы для $n = 0$). Одномерный куб – это отрезок единичной длины, в нём две вершины и одно ребро (см. строку для $n = 1$). Вершины в нём и во всяком другом кубе – это грани размерности $k = 0$. Но согласно определению из подраздела 8.2, вершины – это также и грани ранга $r = n - 0 = n$, так как для их задания системой уравнений вида 8.2 нужно указать значения всех n переменных.

Двумерный куб, описанный в строке для $n = 2$, обычно называют квадратом. Он состоит из четырёх граней-вершин размерности 0 и ранга 2, четырёх граней-рёбер размерности $k =1$ и единственной грани размерности два, которая совпадает с самим квадратом. Каждое ребро в квадрате и во всех кубах большей размерности – это грань ранга $r =n - k = n -1$.

Трёхмерный куб – это обычный кубик, каким мы его встречали в виде каркасной модели в школьном кабинете математики. Он описан в строке с $n = 3$. Его составляют 8 вершин, 12 граней-рёбер размерности $k = 1$ и ранга $r =n - k = 2$ и 6 граней размерности 2, которые обычно и называют просто гранями. Эти обыкновенные грани в кубе размерности n имеют ранг $r = n - k = n - 2$, а значит, в обычном трёхмерном кубе их ранг равен 1.

Четырёхмерный куб иногда называют тессерактом. О нём и о кубах большей размерности в таблице 8.7 приведено совсем мало сведений. Сказано лишь, что в тессеракте 16 вершин и один куб размерности 4, который, естественно, совпадает с самим тессерактом. То же самое и о других кубах размерности $n > 3$ – у них 2^n вершин и одна грань размерности n, которая и есть сам куб. Кроме того, о кубах любой размерности n известно, что они не могут содержать в себе грани размерности большей чем n – об этом говорят прочерки в каждой строке таблицы.

У п р а ж н е н и е 8.5 *Заполните самостоятельно клетки таблицы 8.7, в которых стоят вопросительные знаки. У к а з а н и я. 1). В этой таблице полно всяких закономерностей – есть закономерность для чисел из каждого столбика, каждой строки, каждой диагонали (две из них уже заполнены единицами и прочерками), а также и более сложные. Пример, такой сложной закономерности: в квадрате (n = 2) имеется 4 ребра, в обычном кубе (n = 3) – 6 двумерных (обыкновенных) граней. Причём и рёбра для квадрата, и грани для кубика являются границами, т.е. очерчивают, ограничивают эти фигуры. «Поколдуем» с этими 4 и 6 (точнее применим к ним некую закономерность) и – в результате получаем, что рёбер в кубике должно быть 12. 2). Найти эти закономерности, а может быть, и заполнить всю таблицу, очень поможет определение подраздела 8.2 и особенно формула 8.2, описывающая грань данного ранга r и размерности k в n-мерном кубе. Ясно, что ключевой ко всей таблице 8.7 является формула, которая должна стоять в самой правой и крайней нижней клетке.*

У п р а ж н е н и е 8.6 *Нарисуйте (а лучше начертите) а) четырёхмерный куб; б) пятимерный куб; в) шестимерный куб. Это Вам поможет заполнить некоторые клетки таблицы 8.7. У к а з а н и е. Вначале проанализируйте как рисуется обычный трёхмерный куб с использованием двух уже нарисованных квадратов, и как можно нарисовать квадрат, используя пару нарисованных рёбер.*